На правах рукописи

ДЖУКАШЕВ Камиль Рамилевич

ЭЛАСТИЧНЫЕ ТРИ-ТКАНИ

01.01.04 - Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань — 2016

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Тверской государственный университет», на кафедре функционального анализа и геометрии математического факультета.

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор Шелехов Александр Михайлович ФГБОУ ВО "Тверской государственный университет"
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Степанов Сергей Евгеньевич ФГБОУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
	кандидат физико-математических наук, доцент Шурыгин Вадим Вадимович ФГАОУ ВО "Казанский (Приволжский) федеральный университет"
Ведущая организация	ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук

Защита состоится 17 ноября 2016 года в 16.00 на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Россия, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Кремлевская, д.35.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета и на сайте kpfu.ru.

Автореферат разослан "___"______________ 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент Липачев Е.К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы исследования. Интерес к многомерным три-тканям возник в 20-е годы XX века. В 1927 году появились работы В. Бляшке и его ученика Г. Томсена, посвященные новому разделу дифференциальной геометрии. Уже в первых работах было отмечено, что особую роль в теории три-тканей имеют условия замыкания конфигураций, образованных слоями криволинейной ткани. Кроме того было установлено, что теория три-тканей тесно связана с алгебраической теорией квазигрупп и луп. В 1928 году была опубликована работа К. Рейдемейстера, а в 1932 году - работа Х. Кнессера, в которых было показано, что с помощью произвольной группы можно построить полную три-ткань. А позже в работе Г. Бола было отмечено, что полную ткань можно построить с помощью группоида более общего вида, а именно - с помощью квазигруппы. С другой стороны, каждая три-ткань с точностью до изотопии определяет единственную квазигруппу, которая называется координатной квазигруппой этой три-ткани.

В своих работах В. Бляшке и его ученики - Г. Томсен, К. Рейдемейстер и Г. Бол рассмотрели условия замыкания некоторых конфигураций, образованных слоями ткани, и показали, что им соответствует некоторые тождества, выполняемые в координатных квазигруппах и координатных лупах ткани. В работах Бляшке и Томсена появилось условие шестиугольности (H), в работе Рейдемейстера - условия замыкания Рейдемейстера и Томсена, а в работах Бола - три условия Бола.

Дифференциальные уравнения три-ткани, образованной тремя r-мерными слоениями на $2r$-мерном многообразии, впервые получил С. Черн. М.А. Акивис записал структурные уравнения тканей в современной компактной инвариантной форме. Это позволило ему и его ученикам эффективно изучать общую теорию тканей и исследовать отдельные классы тканей. В частности, М. Акивис ввел понятие касательной W-алгебры многомерной три-ткани, обобщающей алгебру Ли. В терминах этой W-алгебры были охарактеризованы основные классы многомерных три-тканей.

Исследования специальных классов тканей имеет прикладное значение: как уже отмечалось выше, теория три-тканей тесно связана с теорией квазигрупп, а вследствии этого, с разделами физики, в которых используются неассоциативные структуры. Неассоциативные структуры, не являющиеся, вообще говоря, алгебрами, и в некотором смысле близкие к группам, начала изучать Рут Муфанг. Она рассмотрела группоид со свойством однозначной разрешимости и с двусторонней единицей, в котором выполняется тождество

$(xy)(zx) = x((yz)x)$ (теперь он называется лупой Муфанг). Тождество Муфанг вытекает из тождества ассоциативности, но обратное, вообще говоря, неверно. Муфанг доказала, что лупа Муфанг диассоциативна – любые два ее элемента порождают ассоциативную подлупу. Три-ткани, в координатных квазигруппах которых выполняется тождество Муфанг, называются соответственно тканями Муфанг (M).

Аналитические лупы, близкие у группам Ли, начал рассматривать А.И. Мальцев. Он ввел понятие локальной аналитической лупы, ее касательной алгебры, показал, что теория аналитических луп Муфанг во многом повторяет теорию групп Ли. Например, для первых также имеет место формула Кэмпбелла-Хаусдорфа, а их касательная алгебра (теперь она называется алгеброй Мальцева) определяется некоторым кубическим тождеством на структурный тензор (тождество Сейгла) — аналогом тождества Якоби.

Следующие (по сложности) за тканями Муфанг многообразия тканей — левые, правые и средние ткани Бола. Левые и правые ткани определяются соответственно тождествами $(x(yx))z = x(y(xz))$, $x((yz)y) = ((xy)z)y$, выполняемыми в координатных лупах этих тканей. Ткани Бола интересны, в частности, тем, что на них естественным образом возникает структура симметрического пространства. Любая ткань Муфанг является правой, левой и средней тканью Бола, но обратное, вообще говоря, неверно.

Ткани Бола характеризуются тем, что их тензор кососимметричен по какой-либо паре нижних индексов. Класс четырехмерных тканей Бола был подробно изучен в работах А.Д. Иванова. В частности, он доказал, что четырехмерные ткани Бола алгебраизуемы и могут быть заданы с помощью поверхности второго порядка и плоскости. Это позволило ему провести их полную классификацию. Достаточность тензорных условий, характеризующих ткани Бола произвольной размерности, получены В.И. Федоровой. В частности, она рассмотрела основные классы шестимерных тканей Бола.

Настоящая работа посвящена классу три-тканей E, образованных r-мерными слоениями на 2r-мерном гладком многообразии, в координатных лупах которых выполняется тождество эластичности $x(yx) = (xy)x$. Несмотря на простой вид тождества эластичности, класс тканей E изучен мало. Впервые данный класс тканей описан А.М. Шелеховым. Он доказал, что класс эластичных тканей (ткани E) содержится в классе средних тканей Бола. В настоящее время неизвестно других классов тканей (или луп) промежуточных между тканями (лупами) Бола и Муфанг. Также им проведена классификация шестимерных эластичных тканей и доказано, что существует всего две неэквивалентные эластичные ткани, названные им тканями E_1 и E_2, а нетривиальных (немуфанговых и негрупповых) эластичных тканей меньшей размерности не существует. В работах Г.А. Баландиной было начато исследование дифференциальной окрестности пятого порядка эластичной три-ткани. Примеры нетривиальных восьмимерных эластичных тканей были найдены М.В. Антиповой, которая изучала средние ткани Бола с тензором кривизны минимального ранга.

Цель работы. Изучить эластичные три-ткани, описать их геометрические свойства и провести их классификацию. Более подробно изучить эластичные три-ткани с тензором кручения минимального ранга.

Основные задачи исследования. В ходе диссертационного исследования были поставлены следующие задачи:

– найти тензорные соотношения для класса эластичных тканей до пятого порядка включительно;

– построить адаптированный репер для тканей ранга 1, записать в этом репер структурные уравнения ткани, проинтегрировать их и найти конечные уравнения;

– описать основные свойства тканей $E^r(1)$, в частности, A-свойства, найти сердцевину тканей $E^r(1)$;

– построить адаптированный репер для тканей ранга 2, записать в этом репер структурные уравнения ткани, проинтегрировать их и найти конечные уравнения;

– описать основные свойства тканей $E^r(2)$, в частности, A-свойства, найти сердцевину тканей $E^r(2)$;

– определить класс эластичных тканей с тензором кручения произвольная ранга - $E_2^r(\rho)$, описать их свойства.

Методы исследования. В теории многомерных эластичных три-тканей применяются методы тензорного анализа, внешнее дифференциальное исчисление, теория связностей, теория групп Ли, теория симметрических пространств, методы проективной и аффинной геометрии и т.д. Основным методом исследования является метод внешних форм и подвижного репера Э. Картана, адаптированный М.А. Акивисом, В.В. Гольдбергом, А.М. Шелеховым и др. для изучения теории многомерных три-тканей. Результаты, полученные в работе, имеют локальный характер.

Научная новизна. Основные результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, являются новыми. На защиту выносятся следующие результаты.

1. Исследованы дифференциальные окрестности ткани E до пятого порядка включительно; показано, что все тензорные соотношения в дифференциальной окрестности пятого порядка получаются в результате дифференциальных продолжений соотношений, найденных в дифференциальной окрестности четвертого порядка.

2. Определен класс эластичных три-тканей с тензором кручения минимального ранга (ткани $E^r(1)$), найдены и исследованы их структурные уравнения.

3. Показано, что существует два основных класса тканей $E^r(1)$, найдены структурные и конечные уравнения каждого из этих классов.

4. Исследованы свойства каждого из классов $E^r(1)$, в частности, найдены их сердцевины и доказано, что ткани $E_1^r(1)$ являются A_m-тканями, а ткани $E_2^r(1)$ - A-тканями.

5. Определен один из классов эластичных тканей с тензором кручения ранга 2 - $E_2^r(2)$, найдены структурные уравнения таких тканей.

6. Исследованы свойства тканей $E_2^r(2)$, в частности, найдены их сердцевины и доказано, что они являются A-тканями.

7. Определен класс эластичных тканей ранга ρ $E_2^r(\rho)$ и исследованы их основные свойства.

Теоретическое и прикладное значение. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы при чтении спецкурсов в рамках специализации по геометрии тканей и теории локальных аналитических квазигрупп и луп.

Апробация работы. Основные результаты были доложены на следующих конференциях и семинарах:

– третья Российская школа-конференция для молодых ученых с международным участием "Математика, информатика, их приложения и роль в образовании" (Тверь, февраль 2013 г.);

– международная конференция "Геометрия в Одессе - 2013" (Одесса, май 2013 г.);

– международный геометрический семинар имени Г.Ф. Лаптева "Лаптевские чтения - 2013" (Пенза, сентябрь 2013 г.);

– международная научно-техническая конференция "Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании" (г. Ульяновск, апрель 2014 г.);

– международная конференция "Δ-геометрия" (Астрахань, май 2014 г.);

– международная конференция "Геометрия в Одессе - 2014" (Одесса, май 2014 г.);

– седьмая международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям "DFDE-2014" (Москва, август 2014 г.);

– международная конференция "Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования" (Москва, декабрь 2014 г.);

– международная конференция "Геометрия в Одессе - 2015" (Одесса, май 2015 г.);

– международный геометрический семинар имени Г.Ф. Лаптева "Лаптевские чтения - 2015" (Пенза, сентябрь 2015 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [11]. При этом статьи [1] – [3] опубликованы в изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований.

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. В совместных работах [2, 6] постановка задач и идея доказательств принадлежит научному руководителю А.М. Шелехову.

Структура диссертации. Диссертация изложена на 125 страницах печатного текста, состоит из введения, трех глав, включающих 18 параграфов, и списка цитируемой литературы. Список литературы содержит 30 наименования работ отечественных и зарубежных авторов.

Краткое содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, даны краткие исторические сведения по теме диссертации, а также кратко описывается содержание работы.

Первая глава "Эластичные три-ткани" содержит необходимый для дальнейшего теоретический материал. В ней исследуются тензорные соотношения эластичных тканей до дифференциальной окрестности пятого порядка включительно.

В §1.1 "Многомерные три-ткани" дается определение многомерной три-ткани, функции три-ткани и фигур, образованных слоями ткани, формулируются условия замыкания фигур. Определяется эквивалентность три-тканей, вводятся понятия координатной квазигруппы и лупы. С помощью условий замыкания определяются классы три-тканей: шестиугольные, регулярные (параллелизуемые), групповые, левые, средние и правые ткани Бола. Эти классы тканей охарактеризованы тождествами, выполняемыми в их координатных лупах.

В §1.2 "Структурные уравнения многомерной три-ткани" рассматриваются структурные уравнения три-ткани и основные тензоры ткани, в частности, тензоры кручения и кривизны. Приводятся соотношения, связывающие основные тензоры, и формулируется теорема об однозначном задании три-ткани ее тензорами. В этом же параграфе приводятся формулы для вычисления основных тензоров три-ткани через производные от функции ткани. Приводятся тензорные условия, характеризующие основные классы тканей. Рассматривается наиболее важный для дальнейшего класс средних тканей Бола. Приводятся соотношения, связывающие основные тензоры тканей Бола. Как будет показано далее, класс эластичных тканей образует подкласс тканей Бола.

В §1.3 "Эластичные три-ткани" дается определение эластичных три-тканей, в координатных лупах которых выполняется тождество эластичности. Находятся тензорные соотношения, описывающие эластичные три-ткани, до четвертого порядка включительно. Для этого мы используем разложение в ряд Тейлора операции умножения в координатной лупе:

$$\begin{aligned} xy = x + y + \Lambda(x,y) + \frac{1}{2}\underset{21}{\Lambda}(x,x,y) + \frac{1}{2}\underset{12}{\Lambda}(x,y,y) + \frac{1}{6}\underset{31}{\Lambda}(x,x,x,y) + \\ + \frac{1}{4}\underset{22}{\Lambda}(x,x,y,y) + \frac{1}{6}\underset{13}{\Lambda}(x,y,y,y) + \frac{1}{24}\underset{41}{\Lambda}(x,x,x,x,y) + \frac{1}{12}\underset{32}{\Lambda}(x,x,x,y,y) + \\ + \frac{1}{12}\underset{23}{\Lambda}(x,x,y,y,y) + \frac{1}{24}\underset{14}{\Lambda}(x,y,y,y,y) + \{6\}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\Lambda(x,y)$ - кососимметричная форма, $\underset{uv}{\Lambda}(x,..,x,y,..y)$ - однородный многочлен, симметричный по первым u и последним v компонентам.

С его помощью находим произведения $x(yx)$ и $(xy)x$, затем, используя тождество эластичности $x(yx) = (xy)x$ приравниваем соответствующие слагаемые и получаем соотношения на коэффициенты ряда (1), которые выполняются в координатной лупе $\ell(a,b)$ эластичной три-ткани. Далее используем найденные в работе А. Шелехова [1] выражения для компонент основных тензоров три-ткани в точке (a,b) через коэффициенты ряда (1), и находим соотношения на тензоры ткани ткани E. В третьей дифференциальной окрестности получается соотношение

$$b(x,y,z) = -b(x,z,y). \tag{2}$$

которое характеризует средние ткани Бола. В четвертой дифференциальной окрестности получается единственное нетривиальное соотношение

$$b(x,y,a(x,y)) = 0. \tag{3}$$

Кроме того, в этом же параграфе мы находим соотношения в пятой дифференциальной окрестности, которые получаются путем дифференцирования соотношений (3).

В §1.4 "Дифференциальная окрестность пятого порядка эластичной три-ткани" проводится сравнение членов пятого порядка в разложении тождества эластичности, описывающего класс эластичных тканей. В результате получается три новых соотношения на коэффициенты разложения. Затем доказывается, что они являются следствием соотношений, найденных в §1.3 путем дифференцирования (3)(теорема 4).

В главе 2 "Эластичные ткани ранга 1" описывается класс эластичных тканей с тензором кручения ранга 1. Мы находим структурные уравнения таких тканей, интегрируем их, находим конечные уравнения этих тканей в некоторых локальных координатах, исследуем их геометрические свойства.

В §2.1 "W-алгебра эластичных тканей ранга 1" вводится понятие ранга тензора кручения ткани, рассматривается W-алгебра тканей ранга 1. Доказано, что у тензора кривизны таких тканей ранг также снижается, причем тензор кривизны будет ковариантно постоянным относительно связности Черна.

В §2.2 "Структурные уравнения эластичной три-ткани ранга 1" найдены структурные уравнения эластичных тканей ранга 1 и доказано, что ранг тензора кривизны этих тканей также равен единице. Далее доказывается, что существует такой адаптированный репер, в котором все компоненты тензора кривизны являются константами. Показано, что все ткани $E^r(1)$ можно разбить на два класса, которые обозначены E_1^r и E_2^r.

[1]Шелехов А.М. *О вычислении вторых ковариантных производных тензора кривизны многомерной три-ткани* // Ткани и квазигруппы. Калинин: Калининский государственный университет, 1990. с. 10-18

В §2.3 "Ткани E_1^r" рассматривается один из выделенных классов эластичных тканей ранга 1 и доказывается, что система структурных уравнений, описывающих данный класс, является замкнутой относительно операции внешнего дифференцирования и может быть приведена к следующему виду (индексы с "шапочками" принимают значения от 2 до r):

$$
\begin{aligned}
d\underset{1}{\omega}^1 &= \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 + 2a_{1\hat{k}}^1 \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}} + a_{\hat{j}\hat{k}}^1 \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}},\\
d\underset{1}{\omega}^{\hat{i}} &= 0,\\
d\underset{2}{\omega}^1 &= \underset{2}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 - 2a_{1\hat{k}}^1 \underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat{k}} + a_{\hat{j}\hat{k}}^1 \underset{2}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat{k}},\\
d\underset{2}{\omega}^{\hat{i}} &= 0,\\
d\omega_{\hat{j}}^1 &= 2a_{1\hat{j}}^1 \lambda_{\hat{k}\hat{l}} \underset{1}{\omega}^{\hat{k}} \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat{l}},\\
d\omega_{\hat{j}}^{\hat{i}} &= d\omega_1^1 = 0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $a_{1\hat{j}}^1 = const$, $\lambda_{\hat{k}\hat{l}} = -\lambda_{\hat{l}\hat{k}} = const$, а компоненты $a_{\hat{j}\hat{k}}^1$ удовлетворяют соотношениям

$$
\bigtriangledown a_{\hat{j}\hat{k}}^1 = da_{\hat{j}\hat{k}}^1 - a_{1\hat{k}}^1 \omega_{\hat{j}}^1 - a_{\hat{j}1}^1 \omega_{\hat{k}}^1 = -b_{[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}^1 (\underset{1}{\omega}^{\hat{l}} - \underset{2}{\omega}^{\hat{l}}),
\tag{5}
$$

$$
(a_{\hat{j}\hat{k}}^1 - \lambda_{\hat{j}\hat{k}}) a_{1\hat{l}}^1 + (a_{\hat{k}\hat{l}}^1 - \lambda_{\hat{k}\hat{l}}) a_{1\hat{j}}^1 + (a_{\hat{l}\hat{j}}^1 - \lambda_{\hat{l}\hat{j}}) a_{1\hat{k}}^1 = 0.
\tag{6}
$$

В §2.4 "Уравнение три-ткани E_1^r в локальных координатах" эта система проинтегрирована и найдены уравнения ткани E_1^r в локальных координатах:

$$
\begin{aligned}
z^1 &= x^1 + e^{2a_{1\hat{k}}^1 x^{\hat{k}}} (y^1 - \lambda_{\hat{j}\hat{l}} x^{\hat{j}} y^{\hat{l}}),\\
z^{\hat{i}} &= x^{\hat{i}} + y^{\hat{i}},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Доказано, что в случае $r = 3$ ткань E_1^3 совпадает с найденной ранее шестимерной эластичной тканью E_1, уравнение которых в локальных координатах записывается в виде:

$$
\begin{aligned}
z^1 &= x^1 + y^1,\\
z^2 &= x^2 + e^{-2x^1} (y^2 + (y^1 x^3 - x^1 y^3)),\\
z^3 &= x^3 + y^3.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

При нахождении уравнений ткани использовались необходимые, но не достаточные тензорные условия. Поэтому в §2.5 "Доказательство эластичности ткани E_1^r" дается непосредственное доказательство эластичности три-ткани E_1^r с помощью найденных конечных уравнений (теорема 5).

В §2.6 "Три-ткани E_2^r" рассматривается второй из классов эластичных тканей ранга 1 и доказывается, что система структурных уравнений, описывающих данный класс

$$\begin{aligned}
d\underset{1}{\omega}^1 &= \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 + a_{\hat{j}\hat{k}}^1 \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}},\\
d\underset{1}{\omega}^{\hat{i}} &= 0,\\
d\underset{2}{\omega}^1 &= \underset{2}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \omega_{\hat{j}}^1 - a_{\hat{j}\hat{k}}^1 \underset{2}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat{k}},\\
d\underset{2}{\omega}^{\hat{i}} &= 0,\\
d\omega_{\hat{j}}^1 &= b_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}^1 \underset{1}{\omega}^{\hat{k}} \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat{l}},\\
\nabla a_{\hat{j}\hat{k}}^1 = da_{\hat{j}\hat{k}}^1 &= -b_{[\hat{j}\hat{k}]\hat{l}}^1 (\underset{1}{\omega}^{\hat{l}} - \underset{2}{\omega}^{\hat{l}}),
\end{aligned} \tag{9}$$

является замкнутой относительно операции внешнего дифференцирования; проинтегрирована система структурных уравнений ткани E_2^r и найдены ее уравнения в локальных координатах:

$$\begin{aligned}
z^1 &= x^1 + y^1 - \frac{1}{2}(c_{\hat{j}\hat{k}}^1 + \frac{1}{3} b_{\hat{l}\hat{j}\hat{k}}^1 (x^{\hat{l}} - y^{\hat{l}}))(x^{\hat{j}} y^{\hat{k}} - x^{\hat{k}} y^{\hat{j}}),\\
z^{\hat{i}} &= x^{\hat{i}} + y^{\hat{i}}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Доказывается, что три-ткань E_2^r при $r = 3$ совпадает с шестимерной эластичной тканью E_2, которая описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned}
z^1 &= x^1 + y^1 - (x^2 + y^2)x^3 y^3,\\
z^2 &= x^2 + y^2,\\
z^3 &= x^3 + y^3.
\end{aligned} \tag{11}$$

В §2.7 "Доказательство эластичности три-ткани E_2^r" дается непосредственное доказательство эластичности три-ткани E_2^r с помощью найденных конечных уравнений (теорема 6).

При нахождении уравнений три-ткани использовались изотопические преобразования, поэтому первоначальные значение компонент тензоров кручения и кривизны изменились. В §2.8 "Тензоры кручения и кривизны тканей E_1^r и E_2^r" по найденным конечным соотношениям вычислены компоненты основных тензоров тканей E_1^r и E_2^r.

В §2.9 "Об А-свойствах три-тканей E_1^r и E_2^r" исследуются доказывается, что три-ткань E_1^r является средней специальной тканью или A_m-тканью (теорема 8), а три-ткань E_1^r - специальной тканью или A-тканью (теорема 9).

В §2.10 "Сердцевина эластичных три-тканей ранга 1" находятся уравнение сердцевины - бинарной операции на базе третьего слоения. Для ткани E_1^r уравнение сердцевины имеет вид

$$\begin{aligned} c^1 &= a^1 + e^{a^2-b^2}(a^1 - b^1), \\ c^a &= 2a^a - b^a, \end{aligned} \tag{12}$$

а для ткани E_2^r -

$$\begin{aligned} c^1 &= 2a^1 - b^1 - \mu_{abc}(a^a - b^a)a^b b^c, \\ c^a &= 2a^a - b^a. \end{aligned} \tag{13}$$

В главе 3 "Эластичные ткани ранга 2" производится исследование эластичных три-тканей с тензором кручения ранга 2, находятся структурные уравнения таких тканей и уравнения в локальных координатах класса $E_2^r(2)$.

В §3.1 "Структурные уравнения основного класса эластичных три-тканей ранга 2" исследуется W-алгебра эластичных тканей ранга 2, определяются два класса таких тканей, названных основными, и находится система структурных уравнений ткани $E_2^r(2)$ (индексы $u = 1, 2$, а остальные больше трех)

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^u &= \underset{1}{\omega}^a \wedge \omega_a^u + a_{bc}^u \underset{1}{\omega}^b \wedge \underset{1}{\omega}^c, \\ d\underset{1}{\omega}^a &= 0, \\ d\underset{2}{\omega}^u &= \underset{2}{\omega}^a \wedge \omega_a^u - a_{bc}^u \underset{2}{\omega}^b \wedge \underset{2}{\omega}^c, \\ d\underset{2}{\omega}^a &= 0, \\ d\omega_a^u &= b_{abc}^u \underset{1}{\omega}^b \wedge \underset{2}{\omega}^c, \end{aligned} \tag{14}$$

причем тензоры кручения и кривизны удовлетворяются соотношениям:

$$da_{bc}^u = -b_{[bc]d}^u(\underset{1}{\omega}^d - \underset{2}{\omega}^d), \tag{15}$$

$$b_{abc}^u = const, \tag{16}$$

$$b_{a(bc)}^u = 0, \tag{17}$$

$$b_{[abc]}^u = 0. \tag{18}$$

Доказывается, что ткань $E_2^r(2)$ представляет собой полупрямое произведение двух регулярных (параллелизуемых) тканей.

В §3.2 "Уравнение три-ткани $E_2^r(2)$ в локальных координатах" интегрируется система структурных уравнений, найденных в предыдущем параграфе, и находятся уравнения ткани $E_2^r(2)$ в локальных координатах

$$\begin{aligned} z^u &= x^u + y^u + \frac{1}{3} b^u_{abc}(x^a - y^a) y^b x^c + c^u_{ab} y^b x^a, \\ z^a &= x^a + y^a, \end{aligned} \tag{19}$$

где $b^u_{abc} = -b^u_{acb} = const$, $c^u_{ab} = -c^u_{ba} = const$.

При нахождении уравнений ткани использовались необходимые, но не достаточные тензорные условия. Поэтому в §3.3 "Доказательство эластичности три-ткани $E_2^r(2)$" дается непосредственное доказательство эластичности три-ткани $E_2^r(2)$ с помощью найденных конечных уравнений.

В §3.4 "Пример эластичной ткани ранга ρ" обобщаются классы тканей E_2^r и $E_2^r(2)$ до ткани произвольного ранга. В параграфе доказывается, что ткани $E_2^r(\rho)$, заданные уравнениями

$$\begin{aligned} z^u &= x^u + y^u + \frac{1}{3} \mu^u_{abc}(x^a - y^a) y^b x^c + c^u_{ab} y^b x^a, \\ z^a &= x^a + y^a, \end{aligned} \tag{20}$$

где $\mu^u_{abc} = -\mu^u_{acb} = const$, $c^u_{ab} = -c^u_{ba} = const$, $u = 1, ..., \rho$; $a, b, c = \rho + 1, ..., r$, являются r-мерными эластичными тканями и ранг ее производной алгебры, определяемой тензором кручения, равен ρ (теорема 10). Рассматриваются свойства этого класса тканей, в частности, доказывается, что ткани $E_2^r(\rho)$ являются A-тканями и находятся их сердцевины. Сердцевина эластичных три-тканей $E_2^r(\rho)$ описывается уравнением:

$$\begin{aligned} c^u &= 2a^u - b^u - \mu^u_{abc}(a^a - b^a) a^b b^c, \\ c^a &= 2a^a - b^a. \end{aligned} \tag{21}$$

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ.

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

1. Джукашев, К.Р. Об эластичных три-тканях с тензором кручения ранга 1 / К.Р. Джукашев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 4 (28). – С. 61–70.

2. Джукашев, К.Р. Многомерные гладкие лупы с универсальным свойством эластичности / К.Р. Джукашев, А.М. Шелехов // Математический сборник, 206:5 — 2015. — с.35–60.

3. Джукашев, К.Р. Об А-свойствах некоторых эластичных три-тканей / К.Р. Джукашев // Известия высших учебных заведений. Математика - 2016. - № 7. - с. 23–33

Публикации в других изданиях

4. Джукашев, К.Р. *Эластичные три-ткани* / К.Р. Джукашев // Математика, информатика, их приложения и роль в образовании. Третья Российская школа-конференция для молодых ученых. Тезисы докладов. — 2013. — 15-16 февраля. — с. 27

5. Джукашев, К.Р. *О три-тканях с эластичными координатными лупами* / К.Р. Джукашев // Труды международного геометрического центра. — 2013. — с.52-80.

6. Джукашев, К.Р. *Об одном классе эластичных три-тканей с тензором кручения ранга 1* / К.Р. Джукашев, А.М. Шелехов // Сборник научных трудов. Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании. — 2014. — с. 59-71.

7. Джукашев, К.Р. *Классификация многомерных эластичных тканей с тензором кручения ранга 1* / К.Р. Джукашев // Тезисы международной конференции "Геометрия в Одессе - 2014" — 2014. — с.30

8. Джукашев, К.Р. *Об одном классе эластичных три-тканей* / К.Р. Джукашев // Тезисы международной конференции "Δ-геометрия". — 2014. — с. 8.

9. Джукашев, К.Р. *О многомерных решениях уравнения* $(xy)x = x(yx)$ *со свойством универсальности* / К.Р. Джукашев // Тезисы седьмой международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям "DFDE-2014". — 2014. — с. vi

10. Джукашев, К.Р. *Об А-свойствах тканей* E_1^r *и* E_2^r / К.Р. Джукашев // Тезисы международной конференции "Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования". — 2014.

11. Джукашев, К.Р. *Об одном классе эластичных тканей ранга* ρ / К.Р. Джукашев // Тезисы международной конференции "Геометрия в Одессе - 2015". –2015. — с. 73